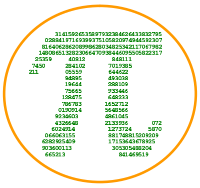
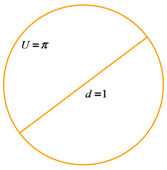


Die Zahl π

Eine unendliche Geschichte

Definition von π mit Hilfe des Kreises



Das Verhältnis von Durchmesser und Umfang eines Kreises ist immer konstant π. Die deshalb auch als Kreiszahl bezeichnete Konstante, tritt in verschiedenen Verhältnisgleichungen auf.

Kreis
$$\pi=\frac{Umfang}{Durchmesser}$$
$$\pi=\frac{Fläche}{Radius^2}$$

Kugel
$$\pi=\frac{3}{4}\frac{Volumen}{Radius^3}$$

Beweis der Formel von Viète

Es sei A_n die Fläche eines regelmäßigen n-Eckes, dessen Eckpunkte auf einem Einheitskreis liegen.
Durch Berechnung der Dreiecksflächen erhalten wir $A_n=n\cdot\sin\frac{\pi}{n}\cdot\cos\frac{\pi}{n}$
Betrachten wir nun das Verhältnis von $A_{2^{n+1}}$ zu A_{2^n}

$$\frac{A_{2^{n+1}}}{A_{2^n}}=\frac{2^{n+1}\cdot\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}\cdot\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2^n\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}\cdot\cos\frac{\pi}{2^n}}$$
$$=\frac{2\cdot\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}\cdot\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2\cdot\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}\cdot\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\cdot\cos\frac{\pi}{2^n}}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^n}}$$
$$A_{2^{n+1}}=A_{2^n}\cdot\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^n}}$$

Wenn wir die Anzahl der Ecken des Polygons erhöhen, näher sich die Fäche A_n der Kreisfläche an.

$$A_{Kreis}=\pi=\lim_{n\to\infty}A_{2^n}=2\cdot\prod_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^n}}=2\cdot\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{\cos\frac{\pi}{8}}\cdot\frac{1}{\cos\frac{\pi}{16}}\cdots$$
$$=2\cdot\frac{2}{\sqrt{2+2\cdot\cos\frac{\pi}{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+2\cdot\cos\frac{\pi}{4}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+2\cdot\cos\frac{\pi}{8}}}\cdots$$
$$=2\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots$$

Historische Rekorde der Berechnung von π

			exakte Stellen
Babylonier	2000 v. Chr.	3.125 (3 + 1/8)	1
Ägypter	1800 v. Chr.	3.16045 ([16/9]²)	1
Archimedes	250 v. Chr.	3.14185	3
Hon Han Shu	130	3.1622 (√10)	1
Liu Hui	264	3.14159	5
Tsu Chung Chih	≈ 480	3.14159292 (355/113)	6
Aryabhata	499	3.14156	4
Al-Kashi	1429		14
Van Ceulen	1609		34
Sharp	1699		71
Machin	1706		100
Vega	1794		140
Strassnitzky & Dahse	1844		200
Rutherford	1853		440
Shanks	1874	707 berechnete Stellen	527

Beweis der Irrationalität

nach Ivan Niven (1947)

Angenommen $\pi=\frac{a}{b}$, ein Quotient zweier natürlicher Zahlen.

Wir definieren zunächst die Funktionen
$$f(x)=\frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$$
$$F(x)=f(x)-f^{(2)}(x)+f^{(4)}(x)-\cdots+(-1)^n f^{(2n)}(x)$$

Es gilt für die ersten Ableitungen
$$f^{(i)}(0)=f^{(i)}(\pi)=0\quad\forall i=1\ldots n-1$$

Ab der n-ten Ableitung entstehen durch Anwenden der Produktregel Summanden, die an den Stellen 0 und π nicht wegfallen. Diese Terme sind aber ganze Zahlen, da mit dem Produkt der abgeleiteten Exponenten (insgesamt $n!$) multipliziert wurde.
Die Ableitung des folgenden Ausdrucks
$$\frac{d}{dx}\left(F'(x)\sin x-F(x)\cos x\right)=F''(x)\sin x+F(x)\sin x=f(x)\sin x$$

führt zu
$$\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx=\left[F'(x)\sin x-F(x)\cos x\right]_0^\pi=F(\pi)-F(0)$$

Der Integrant kann im Intervall $(0,\pi)$ abgeschätzt werden durch
$$0<f(x)\sin x<\frac{\pi^n a^n}{n!}$$

Und damit bei wachsendem n beliebig klein werden. Dies führt zu einem Wiederspruch, denn die Fläche unter dieser Funktion immer eine ganze Zahl ist.

Unsere Annahme $\pi=\frac{a}{b}$ war demnach falsch.

Die Geschichte von π

Zeitalter der Geometrie

Archimedes von Syrakus (287 – 212 v. Chr.)

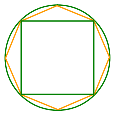
Er stellte in seinem Werk „Über Kreismessung“ fest, dass das Verhältnis von Fläche eines Kreises zum Quadrat des Radius gleich dem Verhältnis seines Umfangs zum Durchmesser ist. Dazu konstruierte er reguläre Polygone, die den Kreis umschreiben bzw. einbeschreiben. Dabei kam er auf diese Näherung:

$$3\tfrac{10}{71}<\pi<3\tfrac{1}{7}$$

François Viète (1540-1603)

Viète berechnete den Flächeninhalt der in einen Kreis einbeschriebenen regelmäßigen Polygone durch iterative Anwendung von Halbwinkeltheoremen der Cosinusfunktion und erhielt damit ein unendliches Produkt zur Berechnung von π.

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}\cdots$$



Zeitalter der Analysis

John Wallis (1616 - 1703)

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Münze bei einer geraden Anzahl von Würfen gleich oft auf Kopf und Zahl fällt ist p (wie angegeben). Die Lösung dieses Ausdrucks für unendliches n fand Wallis noch vor der Einführung der Infinitesimalrechnung.

$$p=\binom{2n}{n}\cdot\frac{1}{2^{2n}}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\qquad\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot2}{1\cdot3}\cdot\frac{4\cdot4}{3\cdot5}\cdot\frac{6\cdot6}{5\cdot7}\cdots\frac{2n\cdot2n}{(2n-1)\cdot(2n+1)}\cdots$$

William Viscount Brouncker (1620 - 1684)

Durch Umstellen der Formel von Wallis erhielt Brouncker einen Kettenbruch für π. Man kann jeder Zahl einen gewöhnlichen Kettenbruch zuordnen. Um diesen zu erhalten schreiben wir die Zahl als Summe einer ganzen Zahl und einer Zahl kleiner als 1. Nun wird der Kehrwert der zweiten Zahl genauso zerlegt, usw.

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cdots}}}$$

Leonhard Euler (1707 - 1783)

Euler war einer der bedeutensten Mathematiker des 18ten Jahrhunderts. Obwohl er meistens mit der Zahl e identifiziert wird, stellte er auch einige Formeln für die Berechnung der Zahl π auf. Eine der bekanntesten Formeln verbindet fünf Basisgrößen und drei Recharten mit einander $e^{i\pi}+1=0$. Er war ebenfalls in der Lage die Summe der reziproken Quadrate zu lösen, an der sich schon viele Mathematiker versucht hatten.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}\qquad\pi=4\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx\qquad\frac{6}{\pi^2}=\prod_{p\ prim}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)$$

Isaac Newton (1643 - 1727)

Unter anderem entwickelte Newton ein iteratives Verfahren zur Berechnung des Kehrwertes $\frac{1}{x}$ langer Zahlen, das zum Beispiel in der Berechnung von π verwendet werden kann. Er selbst berechnete π über die Reihenentwicklung von arcsin$x$ auf 15 Stellen, von denen 13 korrekt waren.

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{1\cdot3\cdots(2p-1)}{2\cdot4\cdots(2p)}\cdot\frac{x^{2p+1}}{2p-1}+\cdots\qquad\arcsin\tfrac{1}{2}=\tfrac{\pi}{6}$$

James Gregory (1638 - 1675)

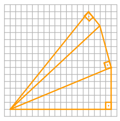
Im Jahre 1671 stellte Gregory eine Formel auf, die den Radius r eines Kreises, den Kreisbogen a und den zugehörigen Tangens t in Beziehung setzt. Daraus lässt sich direkt die Reihenentwicklung für die Unkehrung der Tangensfunktion ablesen. Diese Reihe ist mehrere hundert Jahre lang die Berechnungsgrundlage für π geblieben.

$$a=t-\frac{t^3}{3r^2}+\frac{t^5}{5r^4}-\frac{t^7}{7r^6}+\cdots\qquad\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots\qquad\arctan 1=\tfrac{\pi}{4}$$

John Machin (1680 - 1752)

Die Berechnungsformel von arctan(1) konvergiert langsam, weshalb man sehr viele Reihenglieder berechnen muss. Eine bessere Konvergenz erhält man durch Verknüpfen mehrerer Reihen mit kleineren Argumenten, wodurch Machin 1706 als erster 100 Stellen von π berechnete.

$$\frac{\pi}{4}=2\cdot\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{7}$$



Die Jagd nach Stellen

Miyoshi und Kanada	1981	2.000.036
Bailey	Januar 1986	29.360.111
Kanada und Tamura	November 1986	1.073.741.799
Chudnovskys	August 1991	2.260.000.000
Takahasi und Kanada	Juni 1995	3.221.225.466
Kanada	Oktober 1995	6.442.450.938
Chudnovskys	1996	8.000.000.000
Kanada	Juli 1997	51.539.600.000
Kanada	April 1999	68.719.470.000
Kanada	Dezember 2002	1.241.100.000.000

Yasumasa Kanada ist seit einigen Jahren der einzige Rekordhalter bei der Berechnung von immer mehr Stellen der Zahl π. Von den letzten 25 Weltrekorden sind nicht weniger als 15 mit seinem Namen verbunden. Er arbeitet an der Universität von Tokio und leitet dort ein Laboratorium, Kanada Lab. Er beschäftigt sich mit „High Performance Computing“ und verwendet für seine Rekorde zum Beispiel einen Computer mit 128 Prozessoren.

Es gibt sogar Algorithmen um einzelne Stellen von π zu berechnen, ohne die vorherigen kennen zu müssen. Mit dem erst 1995 vorgestellten „BBP-Verfahren“ hat der 17 Jahre alte Colin Percival die 10billionste hexadezimale Stelle von π als A berechnet. Dazu verwendete er die Rechenleistung von 126 Computern über das Internet.

Kurioses rund um π

Die Formel von Madhava-Gregory-Leibnitz konvergiert sehr schlecht, so benötigt man für 100 genaue Stellen etwa 10^{100} Folgenglieder. Sie besitzt aber die bemerkenswerte Eigenschaft, dass nach einer falschen Stelle einige richtige folgen.

$$\pi=4\cdot\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2k-1}+\cdots\right)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1}$$
$$\pi_{500.000}=4\cdot\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{999999}\right)$$

$$\pi_{500.000}=3.14159\mathbf{0}6535897932\mathbf{40}4626433832\mathbf{6}9502884197$$
$$\pi=3.14159\mathbf{2}6535897932\mathbf{38}4626433832\mathbf{7}9502884197$$

Der Ausdruck $e^{\pi\sqrt{163}}$ scheint sehr kompliziert zu seien, da er die transzendenten Zahlen e und π sowie die Wurzel einer Primzahl enthält. Tatsächlich liegt der Wert allerdings nahe bei einer ganzen Zahl.

$$e^{\pi\sqrt{163}}=262\,537\,412\,640\,768\,743{,}99999\,99999\,992\ldots$$
Noch spektakulärer ist dieser Ausdruck:
$$\sqrt[3]{e^{\pi\sqrt{163}}}-744=640\,319{,}99999\,99999\,99999\,99999\,99993\ldots$$

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Plakatgestaltung von Ralf Ehlert
Markus Durzinsky

Proseminar 2003 Besondere Zahlen
Prof. Bräsel

Quellen

- π - Algorithmen, Computer, Arithmetik; Arndt, Haenel; Springer Verlag Berlin Heidelberg New York; 2. überarb. erw. Auflage 2000
- π - die Story; Jean-Paul Delahaye; Birkhäuser Verlag Basel; 1999
- www.pi314.at
- www.pi314.de
- www.piworld.de
- http://www.cecm.sfu.ca/pi/pi.html
- www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ ↲
  ~history/HistTopics/Pi_through_the_ages.html
- www-stud.enst.fr/~bellard