Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Markus Durzinsky
Mardur@gmx.net

Magdeburg, den 18. März 2004

ein mathematisches Rätsel

Dies ist ein kleines Rätsel, dass Herr Prof. Hollatz seinen Studenten stellt. Dabei geht es um zwei Mathematiker S und P, die den Wert von zwei Zahlen a und b wissen wollen. Nun kennt der Mathematiker S nur die Summe $s = a + b$ und P kennt nur das Produkt $p = a \cdot b$. Die beiden teilen sich diese Zahlen auch nicht gegenseitig mit. Es ist bekannt, dass a und b größer als 1 sind, und dass die Summe s höchstens 100 ist.

Nachdem beide eine Weile überlegen entwickelt sich folgender Dialog:

P *sagt:* „ich weiß die Zahlen nicht“
S *sagt:* „ich weiß“
P *sagt:* „jetzt weiß ich die Zahlen“
S *sagt:* „ich weiß sie auch“

Nun lautet die Frage:

Welchen Wert haben a und b?

Als Hinweis sei gesagt, dass sich das Rätsel eindeutig lösen lässt. Man muss nur jede einzelne Zeile des Dialogs genau analysieren und folgern, was dies für die Zahlen s und p bedeutet. Also viel Spaß beim rätseln.

Die Zahlen a und b sind einem der beiden Mathematiker genau dann bekannt, wenn dieser sowohl p als auch s kennt. Es geht also für beide darum, die Zahl des anderen in Erfahrung zu bringen.

Aus den Beschränkungen $a \geq 2$ und $b \geq 2$ folgt $p = ab \geq 4$. Aber wie groß ist p höchstens? Angenommen die Summe ist maximal $s = 100$. Damit ist $p = a \cdot b = a \cdot (100 - a)$. Diese quadratische Funktion hat ihr Maximum bei $a = b = 50$, wodurch p nach oben durch $50 \cdot 50 = 2500$ beschränkt ist.

P sagt: „ich weiß die Zahlen nicht“

P ist nicht in der Lage p eindeutig in ein Produkt von zwei Zahlen zu zerlegen. Damit kann p nicht das Produkt von zwei Primzahlen sein. Es gibt auch noch einen anderen Fall, der eintritt, wenn p das Produkt von drei gleichen Primzahlen ist. Dann wäre die Zerlegung in $p = a \cdot a^2$ auch eindeutig. Natürlich darf p selbst auch keine Primzahl sein.

$$
\begin{aligned}
f(n) &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{falls } n \in \mathbb{P} \\ 2 & \text{falls } n = a \cdot b \text{ für } a, b \in \mathbb{P} \\ 3 & \text{falls } n = a^3 \text{ für } a \in \mathbb{P} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
\mathcal{P}_1 &= \{\, p \mid 4 \leq p \leq 2500 \wedge f(p) = 0 \,\}
\end{aligned}
$$

Die Menge $\mathcal{P}_1$ enthält alle Zahlen, die noch für p in Frage kommen. Das sind immer noch 1417 Möglichkeiten, die ich hier nicht alle aufführe.

$$p \in \mathcal{P}_1 = \{\, 12, 16, 18, 20, 24, 28, 30, 32, 36, 40, 42, 44, 45, 48, 50, 52, 54, 56, 60, 63, \ldots, 2496, 2499, 2500 \,\}$$

S sagt: „ich weiß“

Woher weiß S, dass P die Lösung nicht kennt? S muss für alle Varianten von a und b überpruft haben, ob sich $a \cdot b$ eindeutig zerlegen lässt. Angenommen $s = 8$. Dann könnte $a = 3$ und $b = 5$ gelten. Damit zerfällt aber $p = a \cdot b = 3 \cdot 5$ eindeutig. Dann könnte sich S nicht sicher sein. Also muss gelten:

$$f(a \cdot (s - a)) = 0 \quad \forall\, a \in \{\, 2, \ldots, s - 2 \,\}$$

Nun sei $\mathcal{S}_2$ die Menge aller s für die das gilt. Damit ergeben sich 24 Möglichkeiten für s.

$$s \in \mathcal{S}_2 = \{\, 11, 17, 23, 27, 29, 35, 37, 41, 47, 51, 53, 57, 59, 65, 67, 71, 77, 79, 83, 87, 89, 93, 95, 97 \,\}$$

P sagt: „jetzt weiß ich die Zahlen“

Durch die Aussage von S ist ihm die Menge $\mathcal{S}_2$ bekannt. Allein diese Kenntnis reicht also aus, damit P auf die Lösung kommt. Daraus folgt, dass es in der Menge $\mathcal{S}_2$ genau ein Element s gibt, welches in zwei Summanden $s = a + b$ zerfällt, sodass $p = a \cdot b$.

$$\mathcal{P}_3 = \{\, p \in \mathcal{P}_1 \mid \exists!\, s \in \mathcal{S}_2 \text{ mit } s = a + b \wedge p = a \cdot b \,\}^1$$

Damit bleiben für p immer noch 336 Möglichkeiten.

$$p \in \mathcal{P}_3 = \{\, 18, 24, 28, 50, 52, 54, \ldots, 2340, 2346, 2350, 2352 \,\}$$

[1] das Symbol $\exists!$ steht für *es existiert genau ein*

S *sagt:* „ich weiß sie auch“

Nun sollte auch S in der Lage sein die letzte Überlegung von P nachzuvollziehen. Dazu werden jedem $s \in \mathcal{S}_2$ alle in Frage kommenden $p \in \mathcal{P}_3$ zugeordnet. Da S die Lösung zum Schluss auch kennt, muss zu dem entsprechenden s in dieser Liste genau ein p existieren.

$$
\begin{aligned}
s = \; & 11, \quad p \in \{\, 18, 24, 28 \,\} \\
s = \; & 17, \quad p \in \{\, 52 \,\} \\
s = \; & 23, \quad p \in \{\, 76, 112 \,\} \\
s = \; & 27, \quad p \in \{\, 50, 92, 140, 152, 176 \,\} \\
s = \; & 29, \quad p \in \{\, 54, 100, 198, 208 \,\} \\
s = \; & 35, \quad p \in \{\, 96, 124, 216, 234, 250, 294, 304 \,\} \\
s = \; & 37, \quad p \in \{\, 160, 232, 336 \,\} \\
s = \; & 41, \quad p \in \{\, 148, 238, 288, 348, 400, 414, 418 \,\} \\
s = \; & 47, \quad p \in \{\, 172, 246, 280, 442, 480, 496, 510 \,\} \\
s = \; & 51, \quad p \in \{\, 98, 144, 188, 230, 308, 344, 468, \ldots, 644, 650 \,\} \\
s = \; & 53, \quad p \in \{\, 430, 492, 520, 592, 646, 672, 682, 700 \,\} \\
s = \; & 57, \quad p \in \{\, 212, 260, 350, 392, 432, 470, 506, \ldots, 810, 812 \,\} \\
s = \; & 59, \quad p \in \{\, 220, 318, 528, 564, 598, 688, 738, \ldots, 864, 868 \,\} \\
s = \; & 65, \quad p \in \{\, 244, 354, 406, 456, 636, 676, 750, \ldots, 1044, 1056 \,\} \\
s = \; & 67, \quad p \in \{\, 192, 366, 472, 742, 912, 940, 990, \ldots, 1116, 1120 \,\} \\
s = \; & 71, \quad p \in \{\, 268, 448, 558, 610, 708, 754, 880, \ldots, 1248, 1258 \,\} \\
s = \; & 77, \quad p \in \{\, 222, 292, 426, 670, 726, 832, 930, \ldots, 1476, 1480 \,\} \\
s = \; & 79, \quad p \in \{\, 228, 438, 568, 748, 804, 960, 1008, \ldots, 1548, 1558 \,\} \\
s = \; & 83, \quad p \in \{\, 316, 600, 666, 730, 852, 1072, 1216, \ldots, 1720, 1722 \,\} \\
s = \; & 87, \quad p \in \{\, 332, 486, 632, 836, 962, 1022, 1136, \ldots, 1886, 1892 \,\} \\
s = \; & 89, \quad p \in \{\, 258, 498, 574, 720, 790, 1168, 1224, \ldots, 1974, 1978 \,\} \\
s = \; & 93, \quad p \in \{\, 356, 830, 902, 972, 1040, 1106, 1232, \ldots, 2160, 2162 \,\} \\
s = \; & 95, \quad p \in \{\, 534, 774, 996, 1134, 1200, 1264, 1444, \ldots, 2254, 2256 \,\} \\
s = \; & 97, \quad p \in \{\, 372, 460, 712, 1162, 1296, 1360, 1422, \ldots, 2350, 2352 \,\}
\end{aligned}
$$

Da es nur ein solches s in der Liste gibt, ist die Lösung des Rätsels für s und p eindeutig.

$$s = 17, \quad p = 52$$

Dies sind die einzigen Zahlen, mit denen das Gespräch der Mathematiker genau so verlaufen kann. Nun kann man noch die Zerlegungen von p in $a \cdot b$ ausprobieren, sodass $a + b = s$. Diese Zerlegung ist bis auf Vertauschung von a und b ebenfalls eindeutig.

$$a = 4, \quad b = 13$$

eine Lösung vom 07. November 2003

von Markus Durzinsky (Mardur@gmx.net)
Student der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Berechnungen durchgeführt mit Hilfe von Maple 8